ЦОРС. Лекция 2

Рисунки носят иллюстративный характер. Обозначения на рисунках могут не соответствовать обозначениям в тексте.

2. ОСНОВЫ АНАЛИЗА АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ

2.1 Классификация сигналов

Напомним, что *Сигналом, называется физический процесс, с параметрами которого связана информация*. Мы будем рассматривать сигналы, как параметры физического процесса, изменяющиеся во времени или в зависимости от других переменных, например, частоты. В дальнейшем, по умолчанию, считается, что сигналы изменяются во времени.

Таким образом, мы будем рассматривать сигналы, как функции того или иного аргумента. Поэтому вспомним кое-что из математики относительно функций. Отметим, что *функция – это правило, которое каждому значению независимой переменной ставит в соответствие определенные значения зависимой переменной.*

Функция записывается следующим образом

$$x = f(t) \quad \text{, или } \; x = x(t) \tag{1.1}$$

где t – независимая переменная это может быть время или другая переменная;

x – зависимая переменная (напряжение, ток, мощность и т.д.);

$f(t), x(t)$ – условное обозначение правила, выражающего функцию.

Функция может быть задана неявно, тогда эта функция будет алгебраическим уравнением. Неявный вид функции более общий, чем функция в явном виде. Например, (1.1) можно представить в виде

$$x - f(t) = 0 \;\text{ , или }\; F(x,t) = 0 \tag{1.2}$$

где $F(x,t)$ – также условное обозначение правила, выражающего функцию.

Если по горизонтальной оси откладывать t, а по вертикальной – x, то мы получим график функции (привести пример).

Функция может быть четной, нечетной или общего вида. Кроме того, она может быть непрерывной или претерпевать разрывы. Рассмотрим эти категории более подробно.

Нечетная функция – это функция, меняющая свое значение на противоположное при изменении знака независимой переменной. Эта функция симметрична относительно центра координат (перпендикулярно рисунку через центр проводим прямую, рассматриваемую, как ось вращения левой полуплоскости). Примеры $x = a \cdot t$, $x = \sin t$.

Примеры – на практике.

Четная функция – это функция, не изменяющая своего значения при изменении знака независимой переменной. Эта функция симметрична относительно оси координат (ось ординат, как ось вращения левой полуплоскости). Примеры $x = |a \cdot t|$, $x = \cos t$.

Функция, не попадающая в эти категории, является функцией общего вида.

Функция называется непрерывной, если малым приращениям независимой переменной соответствуют также малые изменения функции. Иначе функция является разрывной, в местах разрыва функция имеет скачек по зависимой переменной x. Разрывы бывают первого и второго рода. При разрыве первого рода функция претерпевает скачек конечной величины, в случае разрыва второго рода скачек – бесконечный (привести примеры). В ЦОС используются как непрерывные, так и разрывные функции. Следует заметить, что ничего в природе не изменяется скачком, поэтому разрывный сигнал является математической абстракцией, но такая абстракция очень удобна для расчетов (позволяет упростить расчеты и создавать единые теории). В дальнейшем мы будем использовать такие идеализированные сигналы и переменные.

Теперь вернемся к сигналам. Рассмотрим их классификацию.

Для передачи телефонного разговора требуется один сигнал. Но если мы передаем стереозвук или изображение на плоскости, то требуется уже два сигнала, которые синхронизированы между собой. Для передачи объемного изображения нужны три сигнала. Несколько связанных сигналов удобно рассматривать, как единый комплекс, или вектор, характеризующийся размерностью: одиночный сигнал – одномерный, двойной сигнал двумерный и так далее. Отсюда первое разделение сигналов: *сигналы бывают одномерные и многомерные*. В дальнейшем в основном рассматриваются одномерные сигналы.

Если мы считаем, что сигнал нам известен в любой момент времени, то такой сигнал мы называем детерминированным.

Итак: *детерминированным называется сигнал, заранее известный в любой момент времени*.

Но детерминированный сигнал – это также математическая абстракция, все реальные сигналы точно неизвестны, в них всегда есть та или иная доля неопределенности. Если бы мы все заранее знали, то и передавать-то сигналы не понадобилось. Тогда спрашивается, почему мы рассматриваем детерминированные сигналы? Дело в том, их рассмотрение позволяет создать ясную и четкую картину процессов. Детерминированные сигналы являются математической моделью реальных сигналов, позволяющие исследовать их свойства передавать информацию. Поэтому их рассмотрение значительно проще. Но чтобы результаты рассмотрения детерминированных сигналов можно было использовать в реальных условиях, мы выбираем такие сигналы, на которые можно приближенно разложить реальные сигналы. Эти сигналы называются типовыми. Это гармонические, импульсные, ступенчатые и некоторые другие сигналы. Но совокупность детерминированных сигналов является также детерминированным сигналом.

Если все-таки требуется учесть неопределенность сигналов, то для этого используют аппарат теории вероятностей, точнее, ее раздел, называемый теорией случайных процессов. *Сигналы, описываемые с использованием методов теории вероятностей, называются случайными, или стохастическими.* Теория вероятностей использует закономерности, которые проявляются в среднем, и поэтому она значительно сложнее детерминированной теории. В основном мы будем рассматривать детерминированные сигналы.

Все сигналы разделяются на аналоговые, дискретные и цифровые. Мы уже касались этих видов сигналов, еще раз повторим.

Аналоговыми называются сигналы, известные в любой момент времени. Значение аналогового сигнала известно в любой момент времени.

Дискретными называются сигналы, известные только в фиксированные моменты времени. Между этими моментами значение сигналов не определено, об этом просто нет смысла говорить.

Цифровыми называются дискретные сигналы, амплитуда которых представлена в виде цифрового кода.

Все сигналы могут быть периодическими и импульсными одиночными.

2.1.1 Периодические сигналы.

Периодическим называется сигнал, повторяющийся через равные промежутки времени. Для него справедливо соотношение

$$x(t+nT) = x(t) \quad \text{при любом } t \tag{1.3}$$

Здесь T – период повторения сигнала, n – произвольное целое число. В сигнале может фигурировать величина, обратная периоду, которая называется частотой повторения сигнала $\frac{1}{T} = f$. Для описания периодических процессов широко используется понятие круговой частоты $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$. Эти соотношения полезно запомнить. В теории сигналов в основном используется круговая частота ω.

Периодический сигнал, помимо периода, характеризуется формой периодической части.

Широко используют типовые периодические сигналы. Они характерны тем, что у них определена форма периодической части. Рассмотрим основные периодические сигналы.

1) *Гармонический сигнал*. Это синус или косинус, они легко переходят один в другой. Запишем этот сигнал через косинус

$$x(t) = A \cdot Cos(\omega t + \varphi) \tag{1.4}$$

Гармонический сигнал полностью определяется тремя числовыми параметрами: амплитудой A, частотой ω и начальной фазой φ. (На практике – нарисовать косинусоиду, синусоиду и как они переходят друг в друга). Это – четная функция.

2) *Сигнал прямоугольной формы*. Его вид изображен на рисунке 2.1.

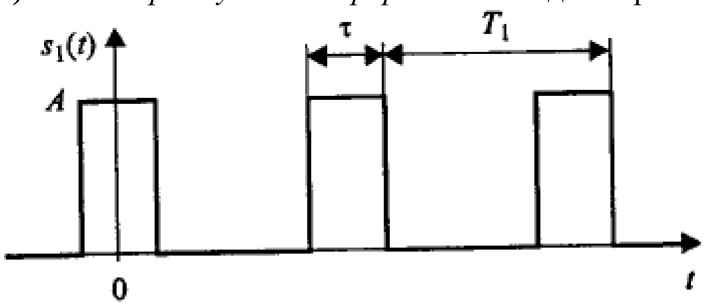

Рисунок 2.1 – периодический сигнал прямоугольной формы

Этот сигнал представляет собой последовательность прямоугольных импульсов. Помимо периода T и амплитуды A, он характеризуется длительностью импульсов τ. Отношение $q = \frac{T}{\tau}$ называется скважностью импульсов, обратное отношение $k_з = \frac{\tau}{T}$ называется коэффициентом заполнения.

3) *Пилообразный сигнал*. Его вид изображен на рисунке 2.2.

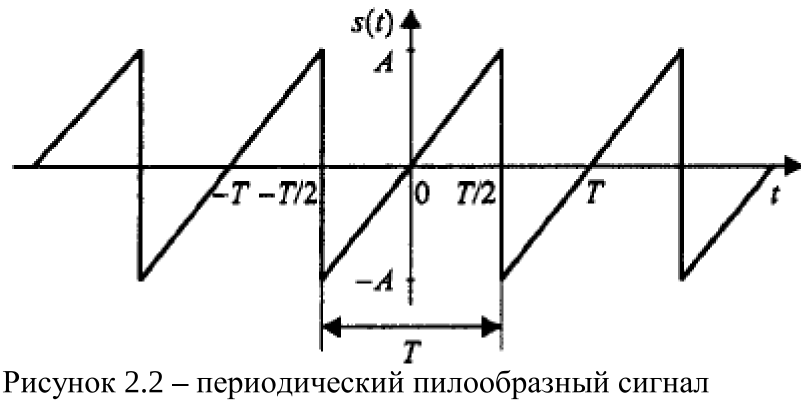

Рисунок 2.2 – периодический пилообразный сигнал

Этот сигнал представляет собой последовательность треугольных импульсов. Он характеризуется периодом повторения T и амплитудой A.

4) *Импульсный периодический сигнал*. Представляет собой последовательность импульсов произвольной формы. Характеризуется периодом повторения T и параметрами формы импульса. Это амплитуда A, длительность фронта и спада и некоторыми другими.

2.1.2 Импульсные одиночные сигналы.

Теперь рассмотрим импульсные одиночные сигналы. *Импульсный одиночный сигнал представляет собой одиночный импульс определенной формы*. Типовыми являются следующие импульсные сигналы.

1) *Прямоугольный импульс*. Показан на рисунке 2.3

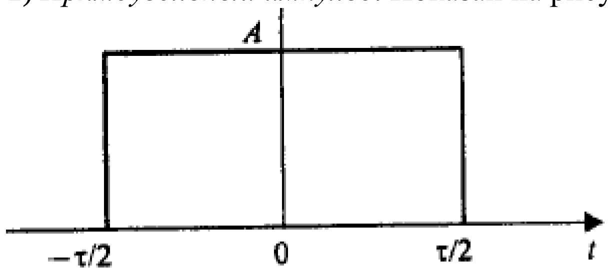

Рисунок 2.3 – прямоугольный импульс

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Возможно описание этого сигнала двумя функциями единичного скачка, об этом – позже.

2) *Дельта-функция* ***δ(t)****, или функция Дирака. Это бесконечно короткий импульс в нулевой момент времени с бесконечно большой амплитудой и площадью, равной единице.*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \ne 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

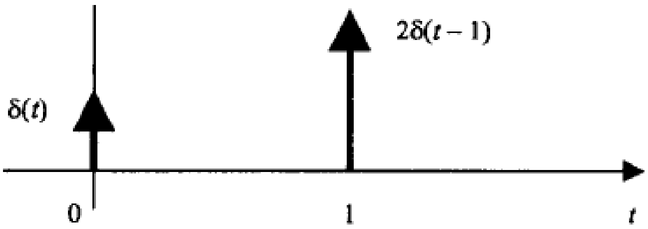

Рисунок 2.4– Дельта-функция *δ(t)*

Дельта-функция, как и любой импульсный сигнал, может быть сдвинута по оси времени на заданную величину t_1, это запишется так: $\delta(t - t_1)$. Например, график $\delta(t - 1)$ изображен на рисунке 2.4. При $t = 1$ аргумент дельта-функции равен нулю, и в этот момент возникает дельта-импульс, что отражено на рисунке 2.4.

Дельта-функцию нельзя реализовать физически, но это – удобная математическая абстракция, она широко используется при анализе сигналов и систем.

Одно из важных свойств дельта-функции – так называемое фильтрующее свойство. Оно состоит в том, что если дельта-функции присутствует под интегралом в качестве сомножителя, то результат интегрирования будет равен значению остального подынтегрального выражения в той точке, где сосредоточен дельта-импульс.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = x(t_0) \qquad (1.5)$$

3) *Функция единичного скачка σ*(*t*)*, или функция Хевисайда*. График функции показан на рисунке 2.5.

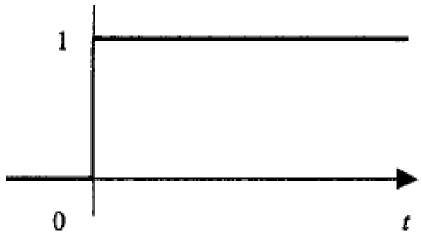

Рисунок 2.5 – Функция единичного скачка $\sigma(t)$

Это также удобная математическая абстракция, та как идеальный скачек реализовать нельзя. Эту функцию удобно использовать для мат. описания сигналов конечной длительности. Например, прямоугольный импульс длительностью T можно записать так

$$x(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t-T)) . \tag{1.6}$$

Отметим, что функция единичного скачка есть интеграл от дельта-функции (фильтрующее свойство дельта-функции, см. выражение (1.5)). Дельта-функция есть производная от функции единичного скачка.

2.2 Энергия и мощность сигналов

В теории сигналов используются понятия энергии, мощности и средней мощности сигналов. Эти величины вычисляются по формулам (Серг., с. 22)

$$E = \int_0^T x^2(t)dt , \quad p(t) = x^2(t) , \quad P_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \tag{1.7}$$

Если $x(t)$ – напряжение, то энергия, мощность и средняя мощность сигналов выделяются на резисторе сопротивлением один Ом.